

Soustavy lineárních rovnic a Gaussova eliminace

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Cv. 2.4 Necht' matice A je v odstupňovaném (tj. REF) tvaru. Diskutujte, které podmatice A jsou také v REF a které už být nemusí.

Cv. 2.5 Známe elementární řádkové úpravy. Které řádkové úpravy ale jsou „nesprávné“?

Cv. 2.6 Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$\begin{aligned}(a) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) &= t \cdot (-2, 1, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R}. \\ (b) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 2, 3, 4) + t \cdot (-2, 1, 0, 0) + s \cdot (0, 0, 1, 1), \quad t, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Cv. 2.7 Najděte konkrétní matici A takovou, aby počet řešení soustavy $(A \mid b)$ byl:

$$\begin{aligned}(a) \quad \infty \text{ pro každé } b, & \qquad (c) \quad 0 \text{ nebo } 1, \text{ v závislosti na } b, \\ (b) \quad 1 \text{ pro každé } b, & \qquad (d) \quad 0 \text{ nebo } \infty, \text{ v závislosti na } b.\end{aligned}$$

Cv. 2.8 Vyřešte soustavu lineárních rovnic $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Cv. 2.9 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

Cv. 2.10 Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

To jest, vyřešte tři soustavy $(A \mid b_i)$ pro $i = 1, 2, 3$. Navrhněte co nejefektivnější způsob!