

Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i -tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i -tý a j -tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

Cv. 4.5 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Cv. 4.6 Upravte následující výrazy.

(a) $(ABC)^{-1}$

(b) $(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}$

Cv. 4.7 Vyřešte maticovou rovnici $AX = B$ pro

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix},$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Jakým způsobem lze (obecně) řešit maticovou rovnici ve tvaru $XA = B$?

Cv. 4.8 Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

Cv. 4.9 Invertujte matici řádu n :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Cv. 4.10 Mějme blokovou matici $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$ s bloky $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Rozhodněte, kdy je regulární.
- (b) Určete inverzi, pokud $B = 0_n$.
- (c) Určete inverzi obecně.

Cv. 4.11 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.