

Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

- (a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$, sčítání a násobení skalárem je standardně po složkách,
- (b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$, sčítání a násobení skalárem je standardně po složkách,
- (c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$, sčítání a násobení skalárem je standardně po složkách,
- (d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,
- (e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,
- (f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení skalárem je definováno standardně po složkách.
- (g) množina všech zobrazení $f: M \rightarrow V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Řešení:

- (a) Jedná se o vektorový prostor, protože
 - $(\mathbb{Z}_p^n, +_{\text{mod } p})$ je Abelova grupa,
 - modulární násobení je asociativní,
 - roli neutrálního prvku pro modulární násobení zastává $1 \in \mathbb{Z}_p^n$,
 - modulární aritmetika je distributivní.
- (b) Jedná se o vektorový prostor, protože $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$ má pro operace sčítání a násobení skalárem stejná vlastnosti jako vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Potenciálně jediný problém by mohl být použití jiného tělesa, protože bychom mohli při násobení skalárem dostat vektory mimo $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, tento problém nenastane.
- (c) Narozdíl od předchozího případu zde už problém nastane. Nejedná se o vektorový prostor, protože při násobení vektoru skalárem se nejedná o operaci $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}^n$; můžeme dostat ve vektoru reálné složky. Není splněna uzavřenost množiny na danou operaci.
- (d) Není vektorový prostor, protože neplatí asociativita násobení:

$$\alpha \odot (\beta \odot v) = \alpha \odot (-\beta v) = \alpha \beta v \neq -\alpha \beta v = (\alpha \beta) \odot v.$$

Jako konkrétní protipříklad stačí vzít $\alpha = \beta = 1$ a $v = (1, 1)^T$.

- (e) Není vektorový prostor, protože neplatí distributivita. Pro jakékoli $\beta = -\alpha \neq 0$ dostáváme

$$(\alpha + \beta) \odot v = |0|v = 0 \neq 2|\alpha|v = |\alpha|v + |-\alpha|v = \alpha \odot v + \beta \odot v.$$

Konkrétně například stačí vzít $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $v = (1, 1)^T$.

- (f) Prvky množiny $U \times V$ jsou uspořádané dvojice (u, v) , kde $u \in U$, $v \in V$. Pro $(u, v), (u', v') \in U \times V$ je součet definován takto: $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$. Násobek je definován analogicky $\alpha(u, v) = (\alpha u', \alpha v)$, kde $\alpha \in \mathbb{T}$ a $(u, v) \in U \times V$.

Vlastnosti operací $U \times V$ nad $\mathbb{T}$ plynou z vlastností operací pro jednotlivé prostory U a V , takže se jedná vektorový prostor.

- (g) Pokud není uvedeno jinak, uvažujeme přirozené definice operací sčítání a násobení funkcí, tedy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = f(x).$$

Následně o dvou funkcích řekneme, že se rovnají, pokud se rovnají jejich funkční hodnoty na všech $x \in M$. Daná struktura je vektorový prostor, protože platí

- i. asociativita sčítání

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

- ii. neutrální prvek pro sčítání je funkce $e(x) = o$, kde o je nulový vektor prostoru V ,

- iii. inverzní prvek f^{-1} k funkci f je $f^{-1}(x) = -1 \cdot f(x)$,

- iv. komutativita sčítání

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$

- v. asociativita násobení skalárem

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x),$$

- vi. neutrální prvek pro násobení skalárem je $1 \in \mathbb{T}$,

- vii. distributivita

$$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

- viii. distributivita

$$\begin{aligned} (\alpha(f + g))(x) &= \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x). \end{aligned}$$

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

- (a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky reálnými čísly,
 (b) uzavřená na násobky reálnými čísly, ale ne na sčítání.

Řešení:

- (a) Např. množina $\{(i, i)^T \mid i \in \mathbb{Z}\}$.
 (b) Např. sjednocení dvojice různoběžných přímek procházejících počátkem.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

- (a) $\{(s, 5s)^T; s \in \mathbb{R}\}$,
- (b) $\{(s+t, 1)^T; s, t \in \mathbb{R}\}$,
- (c) $\{(s, s^2)^T; s \in \mathbb{R}\}$,
- (d) $\{(s-t, 2t)^T; s, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor $\mathbb{R}^2$, je třeba, aby obsahovala $(0, 0)^T$ a byla uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

- (a) Nulový vektor v množině pro $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:

- $(s, 5s)^T + (t, 5t)^T = (s+t, 5(s+t))^T$,
- $\alpha(s, 5s)^T = (\alpha s, 5\alpha s)^T$.

Jedná se tedy o vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.

- (b) Není podprostorem, neboť $(0, 0)^T$ není součástí množiny.
- (c) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1, 1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2, 2)^T$ už nikoli.
- (d) Nulový vektor v množině pro $t = 0, s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:
- $(a-b, 2b)^T + (c-d, 2d)^T = ((a+c)-(b+d), 2(b+d))^T$,
 - $\alpha(t-s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

Cv. 7.4 Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor, musí obsahovat nulový vektor a být uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

Pokud dosadíme do soustavy rovnic vektor $x = (0, \dots, 0)^T$, dostáváme na levé straně soustavy nuly, tedy nulový vektor je řešením libovolné soustavy rovnic s nulovou pravou stranou.

Uzavřenost na násobky. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $Ax = 0$, po dosazení αx , kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

Obdobně pro součty. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic platí $Ax = Ay = 0$. Tudíž

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

- Triviální příklady jsou celý prostor $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad $\mathbb{R}$, nebo množina $\{0_{n \times n}\}$.
- Netriviálním příkladem jsou poté horní (nebo dolní) trojúhelníkové matice, neboť násobení skalárem, ani součet dvou matic nezmění nulovost prvků pod diagonálou.
- Z podobného důvodu tvoří podprostor diagonální matice.
- Obecněji bychom mohli vzít libovolnou podmnožinu matic, kde určité členy zafixujeme rovny 0 a zbytek členů bude nabývat libovolných hodnot.
- Jiným příkladem jsou magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo).

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$:

- posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
- posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
- monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
- fibonaccijské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Řešení:

- Ne, nejsou uzavřené na součet.
Například $(0, 1, 0, 1, \dots) + (1, 0, 1, 0, \dots) = (1, 1, 1, 1, \dots)$
- Ano, snadno nahlédneme.
- Ne, nejsou uzavřené na součty.
Například $(1, 0, 0, 0, \dots) + (0, 0, 1, 1, \dots) = (1, 0, 1, \dots)$.
- Ano, snadno nahlédneme.

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

- $\text{span}(\text{span}(M)) = \text{span}(M)$,
- $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- $M \subseteq N \Leftarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- $\text{span}(M \cap N) = \text{span}(M) \cap \text{span}(N)$,

Řešení:

Ukážeme dva možné způsoby řešení, podle toho, jakou charakterizaci lineárního obalu použijeme.

První způsob. Podle první definice je lineární obal $\text{span}(M)$ množiny M tvořený průnikem všech podprostorů, obsahujících množinu M . Jinými slovy, $\text{span}(M)$ je (co do inkluze) nejmenší podprostor obsahující M .

- (a) Ano. Množina $\text{span}(M)$ je již podprostor, tudíž jeho lineární obal je on sám.
- (b) Ano. Pokud podprostor U obsahuje množinu N , pak obsahuje i množinu M . Tudíž při konstrukci lineárního obalu $\text{span}(M)$ děláme průnik z týchž podprostorů, jako při konstrukci $\text{span}(N)$, plus případně ještě z nějakých navíc. Proto $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.
- (c) Tento vztah obecně neplatí. Vezměme například množiny $M = V$ a $N = M \setminus \{o\}$. Platí, že $\text{span}(M) = \text{span}(N)$, tím pádem i $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$, ale zároveň neplatí $M \subseteq N$.
- (d) Vztah obecně neplatí. Například pro $M = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ a $N = \{(1, 1)^T\}$. Zatímco $\text{span}(M \cap N) = \{o\}$, tak $\text{span}(M) \cap \text{span}(N) = \text{span}(N) = \{(c, c)^T; c \in \mathbb{R}\}$.

Druhý způsob. Zde vycházíme z tvrzení, že $x \in \text{span}(M)$ právě tehdy, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, vektory $x_1, \dots, x_k \in M$ a koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i.$$

- (a) Ukážeme nejprve, že $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(\text{span}(M))$, tedy že

$$x \in \text{span}(M) \Rightarrow x \in \text{span}(\text{span}(M)).$$

Protože $x \in \text{span}(M)$, dá se vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$. Protože ale $x_i \in \text{span}(M)$ a platí $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$, dostáváme z tvrzení výše, že $x \in \text{span}(\text{span}(M))$.

Naopak pokud $x \in \text{span}(\text{span}(M))$, poté existují $x_1, \dots, x_k \in \text{span}(M)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ takové, že $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$. Každé $x_i \in \text{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij}$ pro jisté $y_{ij} \in M$. Po dosazení dostáváme

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell_i} (\alpha_i \beta_{ij}) y_{ij}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $y_{ij} \in M$ s koeficienty $\alpha_i \beta_{ij}$, tedy $x \in \text{span}(M)$.

- (b) Každý vektor $x \in \text{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ pro určité $x_i \in M$ a $k \in \mathbb{N}$. Protože $M \subseteq N$, platí také, že $x_i \in N$, tedy $x \in \text{span}(N)$.
- (c) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.
- (d) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$ a $(3, 4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Řešení:

Aby dané vektory generovaly $\mathbb{R}^2$, musí jít každý vektor $(a, b)^T \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud rovnost vektorů rozepíšeme po složkách, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}\alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b,\end{aligned}$$

kde α, β jsou neznámé. Maticově můžeme soustavu přepsat a vyřešit jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array} \right).$$

Protože je matice soustavy regulární, má soustava jediné řešení pro jakékoli hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Každý vektor lze tedy pomocí zadané dvojice jednoznačně generovat. K tomuto závěru nepotřebujeme znát přesný tvar řešení soustavy. Na druhou stranu, řešení soustavy nám dává dodatečnou informaci, a to koeficienty příslušné lineární kombinace. V našem případě je řešení $\alpha = -(2a + \frac{3b}{2})$, $\beta = \frac{2a-b}{2}$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

- (a) $(1, 1, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 1, 5)^T$
- (b) $(2, 1, 3)^T, (3, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T$.

Řešení:

K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic.

- (a) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array} \right),$$

která nemá řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Hledaná lineární kombinace tudíž neexistuje.

- (b) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

která má jednoznačné řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right).$$

Řešením je vektor $(1, -1, 2)^T$, tedy platí, že

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$