

Soustavy lineárních rovnic a maticové operace

Úkol 1.1. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a+1 & a & 2a & 1 \\ a & 1 & a+1 & 0 \\ 2a & 0 & 2a & 0 \end{array} \right). \quad [6 \text{ b}]$$

Úkol 1.2. Dokažte, že součin horních trojúhelníkových matic je horní trojúhelníková matice. (Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková, pokud platí $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$.) [6 b]

Úkol 1.3. Stopu matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme jako hodnotu $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$.

Rozhodněte, zda pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí následující vlastnosti (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

- a) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,
- b) $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB)$,
- c) $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$. [6 b]

Úkol 1.4. Rozhodněte a ukažte, pro které hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$ je matice M řádu $n \geq 2$ regulární:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

Poznámka: Matice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má prvky $M_{ii} = a$ a $M_{ij} = b$ pro $i \neq j$. [6 b]