

Vektorové prostory a lineární (ne)závislost

Úkol 3.1. Buď V vektorový prostor. Ukažte, že vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory

$$v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots, \sum_{i=1}^n v_i,$$

(t.j. vektory $\sum_{i=1}^k v_i$ pro $k \in \{1, \dots, n\}$). [6 b]

Úkol 3.2. Určete dimenzi prostoru

$$W = \text{span} \{ (1, 1, 3, 2)^T, (2, 3, 2, 3)^T, (1, -1, 3, 7)^T \}$$

a najděte bázi prostoru W obsahující vektor $v = (1, 3, -5, 0)^T$. [6 b]

Úkol 3.3. Nad $\mathbb{Z}_5$ popište průnik prostorů

$$\text{span}\{(1, 4, 4)^T, (2, 3, 4)^T\} \cap \text{span}\{(1, 1, 4)^T, (2, 4, 0)^T\}.$$

Kolik obsahuje vektorů? [6 b]

Úkol 3.4. Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí následující tvrzení (dokažte, nebo uveďte protipříklad):

- (a) $\mathcal{R}(A + B) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$,
- (b) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ a $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$ implikuje $A = B$,
- (c) $\mathcal{S}(A) \subseteq \text{Ker}(A)$ implikuje $A^2 = 0$,

kde $\mathcal{R}(\cdot)$ označuje řádkový prostor matice, $\mathcal{S}(\cdot)$ označuje sloupcový prostor matice a $\text{Ker}(\cdot)$ označuje jádro matice. [6 b]