

Lineární zobrazení a jejich matice

Úkol 4.1. Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení lineární:

- (a) zobrazení $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ s předpisem $f(A) = \text{tr}(A)$, tedy $f(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$,
- (b) zobrazení $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ s předpisem $f(A) = A + I_n$. [4 b]

Úkol 4.2. O lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ víme, že $f \circ f = \text{id}$ a zároveň $f(1, 2) = (-1, 1)^T$. Najděte předpis pro zobrazení f a matici zobrazení ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$. [6 b]

Úkol 4.3. Bud'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T, (0, 1, -1)^T\}.$$

Najděte bázi B tak, aby matice A byla maticí přechodu

- (a) od báze B do báze B' , tj. ${}_{B'}[id]_B$,
- (b) od báze B' do báze B , tj. ${}_B[id]_{B'}$. [6 b]

Úkol 4.4. Najděte isomorfismus $f: U \rightarrow V$ mezi vektorovými prostory U a V nad $\mathbb{R}$, kde

$$U = \{(v_1, v_2, v_3, v_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = 0\},$$
$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A^T = A\},$$

a dokažte, že nalezené zobrazení f je isomorfismem. [6 b]

Úkol 4.5. Lineární zobrazení $merry: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ je dáno předpisem

$$merry(x, m, a, s) = \begin{pmatrix} x + 2m + s & m - 2a \\ x + 4a + s & m \end{pmatrix}.$$

- (a) Určete bázi jádra a obrazu zobrazení $merry$.
- (b) Rozhodněte, zda je zobrazení $merry$ prosté a „na“. [6 b]