

3. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Ostré nerovnosti a další celočíselné programy

PŘÍKLAD PRVNÍ

Část 1. Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti, kupř. tento:

$$\begin{aligned}5x + 3y &\leq 8 \\2x - 5z &< -3 \\6x + 5y + 2w &= 5 \\3z + 2w &> 5 \\x, y, z, w &\geq 0\end{aligned}$$

Jak pomocí lineárního programování zjistit, zda takovýto systém má přípustné řešení?

Část 2. Můžeme tedy řešit lineární programy s ostrými nerovnostmi? Obecně ne. Jako příklad zkonstruujte „LP s ostrými nerovnostmi“, který:

- má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,
- má přípustné řešení a
- nemá optimální řešení.

Toto se pro lineární program nemůže stát – pokud je LP omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Část 3. Navrhněte postup, který pro LP s ostrými nerovnostmi rozhodne, jestli má optimální řešení.

PŘÍKLAD DRUHÝ Navrhněte řešení následujícího problému s využitím předchozí úlohy. V rovině je dáno m bílých a n černých bodů. Chceme zjistit, zda existuje přímka, která má všechny bílé body na jedné straně a všechny černé body na druhé straně (na přímce žádný bod být nemůže).

PŘÍKLAD TŘETÍ Kocourkovští radní se rozhodli, že přilepší obecnímu rozpočtu pomocí automatizovaného systému kontroly dodržování maximální povolené rychlosti na městských komunikacích. Měřicí systém bude instalován na křižovatkách. Pro jeho správnou funkčnost je třeba aby každý úsek ulice mezi dvěma křižovatkami měl alespoň jednu z koncových křižovatek pokrytou. Dodavatel si účtuje fixní poplatek za každou křižovátku, na kterou bude systém nainstalován.

Zformulujte celočíselný lineární program, který umožní Kocourkovským radním optimálně naplánovat rozmístění měřicího systému.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Díky navýšení městského rozpočtu plánují Kocourkovští radní tento víkend uspořádat festival představující volnočasové aktivity dostupné občanům (spolek dobrovolných hasičů, městská dechová hudba, vodácký oddíl, ...). Kvůli pestrosti festivalu chtějí radní, aby probíhalo co nejvíce akcí zároveň. Musí se ale vypořádat s tím, že Kocourkovští jsou velice aktivní. Mnozí organizátoři jsou důležití pro několik jednotlivých akcí a ty proto nemůžou proběhnout naráz. Radní dostali seznamy organizátorů jednotlivých akcí a vědí tedy, které akce jsou spolu v konfliktu.

Zformulujte celočíselný lineární program pro naplánování co nejnabitějšího festivalu.

PŘÍKLAD PÁTÝ (pokračování 5. příkladu z 2. cvičení)

Formulujte pomocí celočíselného lineárního programování podmínky pro nalezení Hamiltonovské kružnice v grafu.