

4. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Linearita, afinita, konvexita ... prostě geometrie

Příklady naleznete na zadní straně.

D: *Afinní prostor* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je má tvar $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. Již víme, že jde určit pomocí soustavy rovnic $Ax = b$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L .

D: *Afinní kombinace* vektorů a_1, a_2, \dots, a_n je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

D: Množina bodů / vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není afinní kombinací ostatních.

D: *Afinní obal* $\text{Aff}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v \mathbb{R}^d dimenze $d - 1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd. Nadrovinu určuje rovnice $c^T x = b$.

Nadrovina rozděluje prostor \mathbb{R}^d na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K .

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů a_1, a_2, \dots, a_n pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0, 1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je v *konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

D: *Konvexní obal* $\text{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

D: *Konvexní mnohostěn* je libovolný objekt v \mathbb{R}^d , který je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně můžeme říci, že konvexní mnohostěn je libovolná množina bodů tvaru $\{x \mid Ax \leq b\}$ pro nějakou reálnou matici A a reálný vektor b .

D: Necht P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x \mid c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P .

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* \emptyset a P .

D: Stěny dimenze 0 nazýváme *vrcholy*. Stěny dimenze 1 nazýváme *hrany*. Stěny dimenze $d - 1$ nazýváme *fasety*.

D: Řekneme, že konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud se vejde do koule s konečně velkým poloměrem. Pro dobrou intuici si stačí představit, že mnohostěn neutíká do nekonečna.

PŘÍKLAD PRVNÍ

- Víme, že v \mathbb{R}^d je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d+1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v \mathbb{R}^d konvexně nezávislých vektorů?
- Jaký je počet stěn 3D krychle?

PŘÍKLAD DRUHÝ

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru \mathbb{R}^4 ?
2. Jak může vypadat vzájemná poloha dvou rovin v \mathbb{R}^4 ?
3. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v \mathbb{R}^5 v jednom bodě?

PŘÍKLAD TŘETÍ Necht $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + v$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor v . Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $A = L + v$ pro nějaký vektor v .

Charakterizujte všechny vektory v , které posunou lineární prostor L na afinní prostor A .

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Vlastnosti polytopů:

- Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b , jejichž neprázdný průnik s P určuje tutěž stěnu.
- Mějme konvexní mnohostěn P . Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P .

PŘÍKLAD PÁTÝ Už víme, že množina K je konvexní, pokud do množiny patří všechny úsečky s dvěma konci v K . Dokažte podobný popis pro afinitu:

Množina A je afinní podprostor \mathbb{R}^d právě tehdy, když pro každé dva body $a, b \in A$ platí, že *přímka* určená body a, b je celá obsažena v A .

PŘÍKLAD ŠESTÝ Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \ \& \ x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).