8. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Simplexová metoda podruhé

Úloha LP v *rovnicovém tvaru*: max $c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

D: *Bazické řešení* x odpovídající bázi B je řešení soustavy $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

D: *Přípustná báze* je taková, že odpovídající bazické řešení je přípustné, tedy $x \geq 0$.

Pivotovací pravidla (některá):

- největší koeficient – vstupní proměnná bude ta, která má v aktuální účelové funkci největší koeficient.
- největší přírůstek – zvolíme vstupní proměnnou, která povede k největšímu možnému přírůstku účelové funkce.
- nejstrmější hrana – vybereme vstupující proměnnou, jejímž zavedením do báze se průběžné bazické přípustné řešení posune ve směru, který svírá nejmenší úhel s vektorem c. Chceme tedy maximalizovat $\frac{c^T \cdot (x' - x)}{||c|| \cdot ||x' - x||}$, kde x je aktuální bazické přípustné řešení a x' je řešení, které bychom dostali vstupem uvažované zlepšující proměnné do báze.
- Blandovo pravidlo (nejmenší index) – vybereme vstupující proměnnou s nejmenším možným indexem.

Příklad první Vyřešte pomocí simplexové metody následující úlohu LP:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 12 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\leq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, \dots, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad třetí Nalezněte počáteční bazické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max 4x_2 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý Vyřešte simplexovou metodou:

$$
\begin{aligned}
&\max 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\
&x_5 = -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\
&x_6 = -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\
&x_7 = 1 - x_1 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}
$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Poté spočítejte stejnou úlohu pomocí pravidla "největší koeficient".

Příklad pátý Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste si nakreslit mnohostěn P a zdůvodnit, proč se algoritmus zastavil. Závisí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq -1 \\
-x_1 - x_2 &\leq -3 \\
2x_1 - x_2 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &\geq 20 \\
5x + 6y + 5z &\leq 50 \\
x + 3y + 5z &\leq 30 \\
x, y, z &\geq 0
\end{aligned}
$$

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 2 týdny od zadání.

První domácí úkol **[4 body]**

Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bazické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$
\begin{aligned}
\max 4x_1 + x_3 + x_4 & \\
8x_1 - 5x_3 - x_4 &= 40 \\
4x_2 - x_3 - x_4 &= 24 \\
x_3 + x_5 &= 8 \\
-2x_3 + x_4 + x_6 &= 8 \\
x_1, \ldots, x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$