

10. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍHO PROGRAMOVÁNÍ

Komplementarita

Příklady naleznete na zadní straně.

<i>Původní program:</i>	<i>V duálu bude:</i>
maximum	minimum
$\max c^T x$	$\min b^T y$
m podmínek n proměnných	m proměnných n podmínek
i -tá podmínka má \leq	$y_i \geq 0$
i -tá podmínka má \geq	$y_i \leq 0$
i -tá podmínka má $=$	$y_i \in \mathbb{R}$
$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má \geq
$x_j \leq 0$	j -tá podmínka má \leq
$x_j \in \mathbb{R}$	j -tá podmínka má $=$

D(Volnost): Mějme soustavu lineárních nerovnic (S) a v ní j -tou nerovnost

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \dots + a_{jn}x_n \leq b_j.$$

Mějme také nějaký vektor x' .

Pak *volnost* (slack) j -té nerovnosti vůči řešení x' je $s_j^{(S)} = b_j - \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i$. Všimněme si, že pro přípustná řešení vždy platí $s_j^{(S)} \geq 0$. Pokud by nerovnost byla \geq , definujeme volnost jako $s_j^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_{ji}x'_i - b_j$, aby opět platilo $s_j^{(S)} \geq 0$ pro přípustná řešení.

T(Komplementarita): Mějme lineární program (P) a jeho duál (D) v následující formě:

$$\max c^T x, Ax \leq b, x \geq 0, \tag{P}$$

$$\min b^T y, A^T y \geq c, y \geq 0. \tag{D}$$

Mějme také dvojici přípustných řešení primálu a duálu (x^*, y^*) . Pak platí následující věta: Dvojice (x^*, y^*) je dvojicí optimálních řešení právě tehdy, když platí:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i^* \cdot s_i^{(D)} = 0,$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j^* = 0.$$

PŘÍKLAD PRVNÍ Františka opsala od souseda při písence z Lineárního programování primál a optimální řešení duálu. Primálem je:

$$\begin{aligned} \min & 10x_1 - 4x_2 \\ & x_1 + 0.6x_3 + 4x_4 \geq 43 \\ & x_1 - x_2 + 0.6x_3 + 10x_4 \geq 27 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - x_4 \geq 24 \\ & x_1 - x_2 - 0.4x_3 - 2x_4 \geq 22 \\ & x_1 + 3.6x_3 - 3x_4 \geq 56 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimálním řešením duálu je $y = (3.36, 0, 0, 6.48, 0.16)$. Úloha se však ptala na optimální řešení původního programu. Dořešte úlohu za Františku s použitím komplementarity.

PŘÍKLAD DRUHÝ Pro LP a jeho duál z předchozího příkladu nalezněte dvojici nenulových vektorů x a y takovou, že platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i \cdot s_i^{(D)} = 0, \quad (1)$$

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}: s_j^{(P)} \cdot y_j = 0. \quad (2)$$

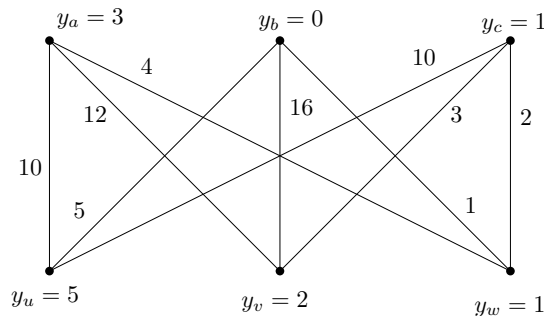
ale x a y **nejsou** dvojicí optimálních řešení.

Tip: Najděte rozdíl mezi zadáním této úlohy a zadáním komplementarity.

PŘÍKLAD TŘETÍ Optimální řešení duální úlohy k následující úloze je $(0; 7; 5; 5; 0)$. Spočtěte pomocí komplementarity optimální řešení primáru.

$$\begin{aligned} \max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, \dots, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Na obrázku je bipartitní graf, který má u hran napsané ceny a u vrcholů řešení duálního programu k perfektnímu párování minimální ceny. Dokažte, že toto řešení je optimální.



Dále se zkuste zamyslet, jaké různé možnosti máte pro dokázání, že dané řešení je optimální.